

El espacio de superficies en una variedad diferenciable

Federico Cantero Morán
Universidad de Barcelona

UNED, 18 de febrero de 2013

Sea M una variedad diferenciable, y sea

$$E_g(M) = \left\{ W \subset M \mid \begin{array}{l} W \text{ es una superficie } \mathbf{orientada compacta conexa} \\ \text{en } M \text{ de género } g \end{array} \right\}$$

Sea M una variedad diferenciable, y sea

$$E_g(M) = \left\{ W \subset M \mid \begin{array}{l} W \text{ es una superficie } \mathbf{orientada compacta conexa} \\ \text{en } M \text{ de género } g \end{array} \right\}$$

Si S_g es una superficie orientada de género g , hay una aplicación exhaustiva

$$\text{Emb}(S_g, M) \longrightarrow E_g(M)$$

Dada por $f \rightarrow f(S_g)$, y la usamos para dotar a $E_g(M)$ de la topología cociente.

Sea M una variedad diferenciable, y sea

$$E_g(M) = \left\{ W \subset M \mid \begin{array}{l} W \text{ es una superficie } \mathbf{orientada compacta conexa} \\ \text{en } M \text{ de género } g \end{array} \right\}$$

Si S_g es una superficie orientada de género g , hay una aplicación exhaustiva

$$\text{Emb}(S_g, M) \longrightarrow E_g(M)$$

Dada por $f \rightarrow f(S_g)$, y la usamos para dotar a $E_g(M)$ de la topología cociente.

La fibra sobre una superficie es $\text{Diff}^+(S_g)$, el grupo de difeomorfismos de S_g que preservan la orientación, y esta aplicación es de hecho el cociente de $\text{Emb}(S_g, M)$ por la acción de $\text{Diff}^+(S_g)$.

Queremos aproximar cada superficie $W \subset M$ con su fibrado tangente.

Queremos aproximar cada superficie $W \subset M$ con su fibrado tangente. Si $p \in W$, podemos aproximar W en p por $T_p W \subset T_p M$, obteniendo una aplicación clasificadora

$$q(W): W \longrightarrow \text{Gr}_2(TM) \quad (1)$$

a la Grassmanniana de 2-planos vectoriales en TM .

Queremos aproximar cada superficie $W \subset M$ con su fibrado tangente. Si $p \in W$, podemos aproximar W en p por $T_p W \subset T_p M$, obteniendo una aplicación clasificadora

$$q(W): W \longrightarrow \text{Gr}_2(TM) \quad (1)$$

a la Grassmanniana de 2-planos vectoriales en TM . Más exactamente, esto es una sección de la restricción del fibrado $\text{Gr}_2(TM) \longrightarrow M$ a W .

Queremos aproximar cada superficie $W \subset M$ con su fibrado tangente. Si $p \in W$, podemos aproximar W en p por $T_p W \subset T_p M$, obteniendo una aplicación clasificadora

$$q(W): W \longrightarrow \text{Gr}_2(TM) \quad (1)$$

a la Grassmanniana de 2-planos vectoriales en TM . Más exactamente, esto es una sección de la restricción del fibrado $\text{Gr}_2(TM) \longrightarrow M$ a W .

Sea $\gamma_2^\perp(TM)$, la Grassmanniana de planos afines.

Queremos aproximar cada superficie $W \subset M$ con su fibrado tangente. Si $p \in W$, podemos aproximar W en p por $T_p W \subset T_p M$, obteniendo una aplicación clasificadora

$$q(W): W \longrightarrow \text{Gr}_2(TM) \quad (1)$$

a la Grassmanniana de 2-planos vectoriales en TM . Más exactamente, esto es una sección de la restricción del fibrado $\text{Gr}_2(TM) \rightarrow M$ a W .

Sea $\gamma_2^\perp(TM)$, la Grassmanniana de planos afines. Si $U: \nu W \rightarrow M$ es un entorno tubular de W , entonces la aplicación (1) se puede extender a una aplicación

$$\begin{array}{ccc} q(W): & W & \longrightarrow \text{Gr}_2(TM) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \tau(W): & U & \longrightarrow \gamma_2^\perp(TM) \end{array} \quad (2)$$

Queremos aproximar cada superficie $W \subset M$ con su fibrado tangente. Si $p \in W$, podemos aproximar W en p por $T_p W \subset T_p M$, obteniendo una aplicación clasificadora

$$q(W): W \longrightarrow \text{Gr}_2(TM) \quad (1)$$

a la Grassmanniana de 2-planos vectoriales en TM . Más exactamente, esto es una sección de la restricción del fibrado $\text{Gr}_2(TM) \rightarrow M$ a W .

Sea $\gamma_2^\perp(TM)$, la Grassmanniana de planos afines. Si $U: \nu W \rightarrow M$ es un entorno tubular de W , entonces la aplicación (1) se puede extender a una aplicación

$$\begin{array}{ccc} q(W): & W & \longrightarrow \text{Gr}_2(TM) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \tau(W): & U & \longrightarrow \gamma_2^\perp(TM) \end{array} \quad (2)$$

mandando un punto $(p, v) \in U$ a $(T_p M + v, -v) \in \gamma_2^\perp(TM) = \{(V, v) \mid V \in \text{Gr}_2(TM), v \in V^\perp \subset \text{Gr}_{d-2}(TM)\}$.

Queremos aproximar cada superficie $W \subset M$ con su fibrado tangente. Si $p \in W$, podemos aproximar W en p por $T_p W \subset T_p M$, obteniendo una aplicación clasificadora

$$q(W): W \longrightarrow \text{Gr}_2(TM) \quad (1)$$

a la Grassmanniana de 2-planos vectoriales en TM . Más exactamente, esto es una sección de la restricción del fibrado $\text{Gr}_2(TM) \rightarrow M$ a W .

Sea $\gamma_2^\perp(TM)$, la Grassmanniana de planos afines. Si $U: \nu W \rightarrow M$ es un entorno tubular de W , entonces la aplicación (1) se puede extender a una aplicación

$$\begin{array}{ccc} q(W): & W & \longrightarrow \text{Gr}_2(TM) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \tau(W): & U & \longrightarrow \gamma_2^\perp(TM) \end{array} \quad (2)$$

mandando un punto $(p, v) \in U$ a $(T_p M + v, -v) \in \gamma_2^\perp(TM) = \{(V, v) \mid V \in \text{Gr}_2(TM), v \in V^\perp \subset \text{Gr}_{d-2}(TM)\}$. Más exactamente, esto es una sección de la restricción del fibrado $\gamma_2^\perp(TM) \rightarrow M$ a U .

Finalmente, sea $\text{Th}(\gamma_2^\perp(TM))$ la compactificación (fibra a fibra) por un punto. Podemos extender la aplicación $\tau(W)$ a una aplicación

$$\begin{array}{ccc}
 q(W): & W & \longrightarrow & \text{Gr}_2(TM) & (3) \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 \tau(W): & U & \longrightarrow & \gamma_2^\perp(TM) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 s(W): & M & \longrightarrow & \text{Th}\gamma_2^\perp(TM). &
 \end{array}$$

mandando los puntos fuera de U al punto del infinito.

Finalmente, sea $\text{Th}(\gamma_2^\perp(TM))$ la compactificación (fibra a fibra) por un punto. Podemos extender la aplicación $\tau(W)$ a una aplicación

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{q}(W): & W & \longrightarrow & \text{Gr}_2(TM) & (3) \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 \tau(W): & U & \longrightarrow & \gamma_2^\perp(TM) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathfrak{s}(W): & M & \longrightarrow & \text{Th}\gamma_2^\perp(TM). &
 \end{array}$$

mandando los puntos fuera de U al punto del infinito.

Más exactamente, esto es una sección del fibrado $\text{Th}\gamma_2^\perp(TM) \rightarrow M$.

Hemos obtenido una aplicación continua

$$E_g(M) \longrightarrow \text{Map}_c(M, \text{Th}\gamma_2^\perp(TM))$$

o, más exactamente, una aplicación continua (la *aplicación scanning*)

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_g : E_g(M) &\longrightarrow \Gamma_c(\text{Th}\gamma_2^\perp(TM) \longrightarrow M) \\ W &\longmapsto \mathfrak{s}(W). \end{aligned}$$

Hemos obtenido una aplicación continua

$$E_g(M) \longrightarrow \text{Map}_c(M, \text{Th}\gamma_2^\perp(TM))$$

o, más exactamente, una aplicación continua (la *aplicación scanning*)

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_g : E_g(M) &\longrightarrow \Gamma_c(\text{Th}\gamma_2^\perp(TM) \longrightarrow M) \\ W &\longmapsto \mathfrak{s}(W). \end{aligned}$$

Si M es simplemente conexa y de dimensión al menos 6, entonces

$$\pi_0\Gamma_c(\text{Th}(\gamma_2^\perp(TM)) \rightarrow M) \cong H_2(M) \times 2\mathbb{Z}.$$

Hemos obtenido una aplicación continua

$$E_g(M) \longrightarrow \text{Map}_c(M, \text{Th}\gamma_2^\perp(TM))$$

o, más exactamente, una aplicación continua (la *aplicación scanning*)

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_g : E_g(M) &\longrightarrow \Gamma_c(\text{Th}\gamma_2^\perp(TM) \longrightarrow M) \\ W &\longmapsto \mathfrak{s}(W). \end{aligned}$$

Si M es simplemente conexa y de dimensión al menos 6, entonces

$$\pi_0 \Gamma_c(\text{Th}(\gamma_2^\perp(TM) \rightarrow M)) \cong H_2(M) \times 2\mathbb{Z}.$$

Denotaremos por $\Gamma_c(\text{Th}(\gamma_2^\perp(TM) \rightarrow M))_g$ a la unión de aquellas componentes etiquetadas por $H_2(M) \times \{2 - 2g\}$.

Hemos obtenido una aplicación continua

$$E_g(M) \longrightarrow \text{Map}_c(M, \text{Th}\gamma_2^\perp(TM))$$

o, más exactamente, una aplicación continua (la *aplicación scanning*)

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_g : E_g(M) &\longrightarrow \Gamma_c(\text{Th}\gamma_2^\perp(TM) \longrightarrow M) \\ W &\longmapsto \mathfrak{s}(W). \end{aligned}$$

Si M es simplemente conexa y de dimensión al menos 6, entonces

$$\pi_0\Gamma_c(\text{Th}(\gamma_2^\perp(TM) \rightarrow M)) \cong H_2(M) \times 2\mathbb{Z}.$$

Denotaremos por $\Gamma_c(\text{Th}(\gamma_2^\perp(TM) \rightarrow M))_g$ a la unión de aquellas componentes etiquetadas por $H_2(M) \times \{2 - 2g\}$. La imagen de \mathfrak{s}_g está contenida en $\Gamma_c(\text{Th}(\gamma_2^\perp(TM) \rightarrow M))_g$.

Teorema (C. - Randal-Williams)

Si M es simplemente conexa y de dimensión al menos 6, entonces

$$\mathfrak{s}_g : E_g(M) \longrightarrow \Gamma_c(\mathrm{Th}(\gamma_2^\perp(TM)) \rightarrow M)_g$$

induce un isomorfismo en grados $k \leq \frac{2g-2}{3}$.

Teorema (C. - Randal-Williams)

Si M es simplemente conexa y de dimensión al menos 6, entonces

$$\mathfrak{s}_g : \mathbb{E}_g(M) \longrightarrow \Gamma_c(\mathrm{Th}(\gamma_2^\perp(TM)) \rightarrow M)_g$$

induce un isomorfismo en grados $k \leq \frac{2g-2}{3}$.

Corolario (C. - Randal-Williams)

Si además $\partial M \neq \emptyset$, entonces el espacio de la derecha es independiente de g , y por tanto $H_k(\mathbb{E}_g(M))$ es independiente de g cuando $k \leq \frac{2g-2}{3}$.

$B\Sigma_n$
(Nakaoka, Barret-Priddy)

$C_n(M) := \text{Emb}([n], M)/\Sigma_n$
(McDuff)

$B\text{Diff}^+(S_g)$
(Harer, Madsen-Weiss)

$E_g(M) := \text{Emb}(S_g, M)/\text{Diff}^+(S_g)$

Podemos construir una *aplicación scanning* para $C_n(M)$ como antes:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{q}(p_1, \dots, p_n): & \{p_1, \dots, p_n\} & \longrightarrow & \text{Gr}_0(TM) = M \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathfrak{r}(p_1, \dots, p_n): & U & \longrightarrow & \gamma_0^\perp(TM) = TM \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathfrak{s}(p_1, \dots, p_n): & M & \longrightarrow & \text{Th}\gamma_2^\perp(TM) = \mathbb{S}(TM).
 \end{array}
 \tag{4}$$

Podemos construir una *aplicación scanning* para $C_n(M)$ como antes:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{q}(p_1, \dots, p_n): & \{p_1, \dots, p_n\} & \longrightarrow \text{Gr}_0(TM) = M \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 \mathfrak{r}(p_1, \dots, p_n): & U & \longrightarrow \gamma_0^\perp(TM) = TM \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 \mathfrak{s}(p_1, \dots, p_n): & M & \longrightarrow \text{Th}\gamma_2^\perp(TM) = \mathbb{S}(TM).
 \end{array}
 \tag{4}$$

Más exactamente, esto es una sección del fibrado de esferas $\mathbb{S}(TM) \rightarrow M$.

Obtenemos así una aplicación continua

$$\mathfrak{s}_n: C_n(M) \longrightarrow \Gamma_c(\mathbb{S}(TM) \longrightarrow M).$$

Obtenemos así una aplicación continua

$$\mathfrak{s}_n: C_n(M) \longrightarrow \Gamma_c(\mathbb{S}(TM) \longrightarrow M).$$

Si M es conexo y de dimensión al menos 2,

$$\pi_0 \Gamma_c(\mathbb{S}(TM)) \rightarrow M \cong \mathbb{Z}$$

Obtenemos así una aplicación continua

$$\mathfrak{s}_n: C_n(M) \longrightarrow \Gamma_c(\mathbb{S}(TM) \longrightarrow M).$$

Si M es conexo y de dimensión al menos 2,

$$\pi_0 \Gamma_c(\mathbb{S}(TM) \longrightarrow M) \cong \mathbb{Z}$$

Denotamos por $\Gamma_c(\mathbb{S}(TM) \longrightarrow M)_n$ la unión de las componentes etiquetadas por n , y observamos que la imagen de \mathfrak{s}_n está contenida en $\Gamma_c(\mathbb{S}(TM) \longrightarrow M)_n$.

Teorema (Segal, McDuff)

Si M es conexa y de dimensión al menos 2, entonces

$$\mathfrak{s}_n: C_n(M) \longrightarrow \Gamma_c(\mathrm{Th}(\mathbb{S}(TM)) \rightarrow M)_n$$

induce un isomorfismo en homología en grados $k \leq \frac{n}{2}$.

Teorema (Segal, McDuff)

Si M es conexa y de dimensión al menos 2, entonces

$$\mathfrak{s}_n: C_n(M) \longrightarrow \Gamma_c(\mathrm{Th}(\mathbb{S}(TM)) \rightarrow M)_n$$

induce un isomorfismo en homología en grados $k \leq \frac{n}{2}$.

Corolario

Si además $\partial M \neq \emptyset$, entonces el espacio de la derecha es independiente de n , y por tanto en ese caso, $H_k(C_n(M))$ es independiente de n cuando $k \leq \frac{n}{2}$.

Si $M = \mathbb{R}^n$, entonces $\Gamma_c(\text{Th}\gamma_2^\perp(TM) \rightarrow M) \simeq \Omega^n \text{Th}\gamma_2^\perp(TM)$. La inclusión $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induce una aplicación

$$\Omega^n \text{Th}\gamma_2^\perp(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega \Omega^{n+1} \text{Th}\gamma_2^\perp(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Tomando el colímite de la aplicación adjunta, obtenemos un espectro **MTSO**(2) y una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{s}_g : & E_g(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow \Omega^n \text{Th}\gamma_2^\perp(\mathbb{R}^n) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{s}_g : & E_g(\mathbb{R}^\infty) & \longrightarrow \Omega_0^\infty \mathbf{MTSO}(2) \end{array} \quad (5)$$

Si $M = \mathbb{R}^n$, entonces $\Gamma_c(\text{Th}\gamma_2^\perp(TM) \rightarrow M) \simeq \Omega^n \text{Th}\gamma_2^\perp(TM)$. La inclusión $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induce una aplicación

$$\Omega^n \text{Th}\gamma_2^\perp(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega \Omega^{n+1} \text{Th}\gamma_2^\perp(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Tomando el colímite de la aplicación adjunta, obtenemos un espectro **MTSO**(2) y una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{s}_g : & E_g(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow \Omega^n \text{Th}\gamma_2^\perp(\mathbb{R}^n) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{s}_g : & E_g(\mathbb{R}^\infty) & \longrightarrow \Omega_0^\infty \mathbf{MTSO}(2) \end{array} \quad (5)$$

Además, el espacio $\text{Emb}(S_g, \mathbb{R}^\infty)$ es contráctil, y por tanto

$$E_g(\mathbb{R}^\infty) \cong \text{Emb}(S_g, \mathbb{R}^\infty) / \text{Diff}^+(S_g) \simeq B\text{Diff}^+(S_g)$$

Si $M = \mathbb{R}^n$, entonces $\Gamma_c(\text{Th}\gamma_2^\perp(TM) \rightarrow M) \simeq \Omega^n \text{Th}\gamma_2^\perp(TM)$. La inclusión $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induce una aplicación

$$\Omega^n \text{Th}\gamma_2^\perp(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega \Omega^{n+1} \text{Th}\gamma_2^\perp(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Tomando el colímite de la aplicación adjunta, obtenemos un espectro **MTSO**(2) y una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{s}_g : & E_g(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow \Omega^n \text{Th}\gamma_2^\perp(\mathbb{R}^n) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{s}_g : & E_g(\mathbb{R}^\infty) & \longrightarrow \Omega_0^\infty \mathbf{MTSO}(2) \end{array} \quad (5)$$

Además, el espacio $\text{Emb}(S_g, \mathbb{R}^\infty)$ es contráctil, y por tanto

$$E_g(\mathbb{R}^\infty) \cong \text{Emb}(S_g, \mathbb{R}^\infty) / \text{Diff}^+(S_g) \simeq B\text{Diff}^+(S_g) \simeq B\Gamma_g \simeq_{\mathbb{Q}} \mathcal{M}_g$$

Teorema (MW'09,GMTW'07 "Mumford Conjecture")

La aplicación scanning

$$\mathfrak{s}_g : B\Gamma_g \longrightarrow \Omega_0^\infty \mathbf{MTSO}(2)$$

induce isomorfismos en homología en grados $$ $\leq \frac{2g-2}{3}$*

Corolario (Harer'84)

$H_k(B\Gamma_g)$ es independiente de g cuando $k \leq \frac{2g-2}{3}$.

1. Definimos los espacios $E_{g,b}(M; \delta)$ de superficies en M de género g cuyo borde es $\delta \subset \partial M$ y δ tiene b componentes conexas.
2. Pegando pares de pantalones, cilindros y discos en $\partial M \times I$ a las superficies $W \in E_{g,b}(M; \delta)$ obtenemos aplicaciones

$$\alpha_{g,b}(M): E(S_{g,b}, M; \delta) \longrightarrow E(S_{g+1,b-1}, M; \delta')$$

$$\beta_{g,b}(M): E(S_{g,b}, M; \delta) \longrightarrow E(S_{g,b+1}, M; \delta')$$

$$\gamma_{g,b}(M): E(S_{g,b}, M; \delta) \longrightarrow E(S_{g,b-1}, M; \delta')$$

1. Definimos los espacios $E_{g,b}(M; \delta)$ de superficies en M de género g cuyo borde es $\delta \subset \partial M$ y δ tiene b componentes conexas.
2. Pegando pares de pantalones, cilindros y discos en $\partial M \times I$ a las superficies $W \in E_{g,b}(M; \delta)$ obtenemos aplicaciones

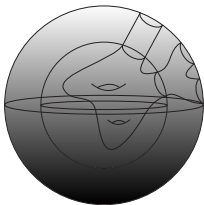
$$\alpha_{g,b}(M): E(S_{g,b}, M; \delta) \longrightarrow E(S_{g+1,b-1}, M; \delta')$$

$$\beta_{g,b}(M): E(S_{g,b}, M; \delta) \longrightarrow E(S_{g,b+1}, M; \delta')$$

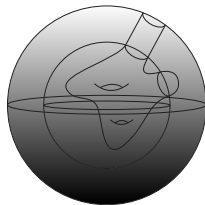
$$\gamma_{g,b}(M): E(S_{g,b}, M; \delta) \longrightarrow E(S_{g,b-1}, M; \delta')$$



(d) $\alpha_{g,b}(M)$



(e) $\beta_{g,b}(M)$



(f) $\gamma_{g,b}(M)$

Teorema

Sea M una variedad 1-conexa y de dimensión ≥ 6 :

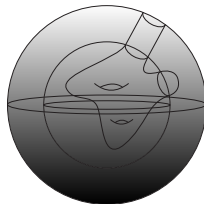
- $\alpha_{g,b}(M)$ induce un isomorfismo en homología en grados $k \leq \frac{2g-2}{3}$ y un epimorfismo en el siguiente grado,
- $\beta_{g,b}(M)$ induce un isomorfismo en homología en grados $k \leq \frac{2g-3}{3}$ y un epimorfismo en el siguiente grado,
- $\gamma_{g,b}(M)$ induce un isomorfismo en homología en grados $k \leq \frac{2g}{3}$ y es siempre un epimorfismo.



(g) $\alpha_{g,b}(M)$



(h) $\beta_{g,b}(M)$



(i) $\gamma_{g,b}(M)$

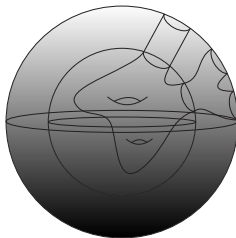
Teorema

Sea M una variedad 1-conexa y de dimensión ≥ 6 :

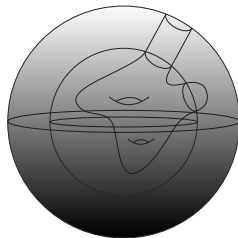
- $H_k(\alpha_{g,b}(M)) = 0$ cuando $k \leq \frac{2g+1}{3}$,
- $H_k(\beta_{g,b}(M)) = 0$ cuando $k \leq \frac{2g}{3}$,
- $H_k(\gamma_{g,b}(M)) = 0$ cuando $k \leq \frac{2g}{3}$.



(j) $\alpha_{g,b}(D^3)$



(k) $\beta_{g,b}(D^3)$



(l) $\gamma_{g,b}(D^3)$

Idea de la demostración de las dos primeras afirmaciones:

La demostración es por inducción en el género g de las superficies. El caso $g = 0$ dice que

$$\pi_0(E_{0,b}(M; \delta)) \xrightarrow{\alpha_{0,b}(M)} \pi_0(E_{1,b-1}(M; \delta'))$$

$$\pi_0(E_{0,b}(M; \delta)) \xrightarrow{\beta_{0,b}(M)} \pi_0(E_{0,b+1}(M; \delta'))$$

son exhaustivas. Esto se demuestra mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_0 E_{0,b}(M; \delta) & \longleftarrow & \pi_0 \text{Emb}(S_{0,b}, M; \delta) & \longrightarrow & \pi_0 \text{Map}(S_{0,b}, M; \delta) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & & & H_2(M; \mathbb{Z}) \\
 & & & & \uparrow \\
 \pi_0(E_{1,b-1}(M; \delta')) & \longleftarrow & \pi_0 \text{Emb}(S_{1,b-1}, M; \delta') & \longrightarrow & \pi_0 \text{Map}(S_{1,b-1}, M; \delta')
 \end{array}$$

$$[H_k(\beta_{g,b}(M)) = 0]_{h \leq g} \Rightarrow [H_k(\alpha_{g,b}(M)) = 0]_{h \leq g} \Rightarrow [H_k(\beta_{g+1,b}(M)) = 0]_{h \leq g+1} \Rightarrow \dots$$

El paso de inducción se divide a su vez en dos pasos:

$$\begin{array}{ccccc} E_{g,b-1}(M) & \longrightarrow & E_{g,b}(M) & \longrightarrow & (\beta_{g,b-1}M) \\ \downarrow \forall & & \downarrow \forall & & \downarrow \\ E_{g,b}(M) & \longrightarrow & E_{g+1,b-1}(M) & \longrightarrow & (\alpha_{g,b}M) \end{array}$$

- ① $\beta_{g,b-1}M \longrightarrow \alpha_{g,b}(M)$ induce un epimorfismo en homología en grados $k \leq (2g+1)/3$.
- ② $\beta_{g,b-1}M \longrightarrow \alpha_{g,b}(M)$ induce el morfismo cero en homología en grados $k \leq (2g+1)/3$.

Consecuencia: Los grupos de homología relativos $H_k((\alpha_{g,b}M))$ son cero si $k \leq (2g+1)/3$.

$$[H_k(\beta_{g,b}(M)) = 0]_{h \leq g} \Rightarrow [H_k(\alpha_{g,b}(M)) = 0]_{h \leq g} \Rightarrow [H_k(\beta_{g+1,b}(M)) = 0]_{h \leq g+1} \Rightarrow \dots$$

El paso de inducción se divide a su vez en dos pasos:

$$\begin{array}{ccccc} E_{g,b-1}(M) & \longrightarrow & E_{g,b}(M) & \longrightarrow & (\beta_{g,b-1}M) \\ \downarrow \forall & & \downarrow \forall & & \downarrow \\ E_{g,b}(M) & \longrightarrow & E_{g+1,b-1}(M) & \longrightarrow & (\alpha_{g,b}M) \end{array}$$

- ① $\beta_{g,b-1}M \rightarrow (\alpha_{g,b}M)$ induce un epimorfismo en homología en grados $k \leq (2g+1)/3$. [Asumiendo que el teorema es cierto para $\beta_{h,c}(M)$, con $h \leq g$]
- ② $\beta_{g,b-1}M \rightarrow (\alpha_{g,b}M)$ induce el morfismo cero en homología en grados $k \leq (2g+1)/3$. [Asumiendo que el teorema es cierto para $\alpha_{h,c}(M)$ con $h \leq g-1$]

Consecuencia: Los grupos de homología relativos $H_k((\alpha_{g,b}M))$ son cero si $k \leq (2g+1)/3$.

$$[H_k(\beta_{g,b}(M)) = 0]_{h \leq g} \Rightarrow [H_k(\alpha_{g,b}(M)) = 0]_{h \leq g} \Rightarrow [H_k(\beta_{g+1,b}(M)) = 0]_{h \leq g+1} \Rightarrow \dots$$

El paso de inducción se divide a su vez en dos pasos:

$$\begin{array}{ccccc} E_{g-1,b+1}(M) & \longrightarrow & E_{g,b}(M) & \longrightarrow & (\alpha_{g-1,b+1}M) \\ \downarrow \sphericalangle & & \downarrow \sphericalangle & & \downarrow \\ E_{g,b}(M) & \longrightarrow & E_{g,b+1}(M) & \longrightarrow & (\beta_{g,b}M) \end{array}$$

- ① $\alpha_{g-1,b+1}M \longrightarrow (\beta_{g,b}M)$ induce un epimorfismo en homología en grados $k \leq 2g/3$.
- ② $\alpha_{g,b-1}M \longrightarrow (\beta_{g,b}M)$ induce el morfismo cero en homología en grados $k \leq 2g/3$.

Consecuencia: Los grupos de homología relativos $H_k((\beta_{g,b}M))$ son cero si $k \leq 2g/3$.








$$[H_k(\beta_{g,b}(M)) = 0]_{h \leq g} \Rightarrow [H_k(\alpha_{g,b}(M)) = 0]_{h \leq g} \Rightarrow [H_k(\beta_{g+1,b}(M)) = 0]_{h \leq g+1} \Rightarrow \dots$$

El paso de inducción se divide a su vez en dos pasos:

$$\begin{array}{ccccc} E_{g-1,b+1}(M) & \longrightarrow & E_{g,b}(M) & \longrightarrow & (\alpha_{g-1,b+1}M) \\ \downarrow \sphericalangle & & \downarrow \sphericalangle & & \downarrow \\ E_{g,b}(M) & \longrightarrow & E_{g,b+1}(M) & \longrightarrow & (\beta_{g,b}M) \end{array}$$

- ① $\alpha_{g-1,b+1}M \longrightarrow (\beta_{g,b}M)$ induce un epimorfismo en homología en grados $k \leq 2g/3$. [Asumiendo que el teorema es cierto para $\alpha_{h,c}(M)$ para todo $h \leq g-1$]
- ② $\alpha_{g,b-1}M \longrightarrow (\beta_{g,b}M)$ induce el morfismo cero en homología en grados $k \leq 2g/3$. [Asumiendo que el teorema es cierto para $\beta_{h,c}(M)$ para todo $h \leq g-1$]

Consecuencia: Los grupos de homología relativos $H_k((\beta_{g,b}M))$ son cero si $k \leq 2g/3$.

-  F. Cantero, O. Randal-Williams, *The space of surfaces in a manifold*, in preparation.
-  S. Galatius, I. Madsen, U. Tillmann, M. Weiss, *The homotopy type of the cobordism category*, Acta Math. **202** (2) (2009) 195–239.
-  S. Galatius, O. Randal-Williams, *Monoids of moduli spaces of manifolds*, Geometry & Topology **14** (3) (2010) 1243–1302.
-  O. Randal-Williams, *Resolutions of moduli spaces and homological stability*, arXiv:0909.4278.
-  O. Randal-Williams, *Embedded cobordism categories and spaces of manifolds*, Internat. Math. Res. Notices **3** (2010) 572–608.
-  D. McDuff, *Configuration spaces of positive and negative particles*, Topology **14** 1975 91–107
-  G. Segal, *The topology of spaces of rational functions* Acta Math., **143** (1-2) 1979 39–72.